Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
Übung

1. Überprüfen Sie auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Begründen Sie ohne Rechnung, dass folgende Vektoren linear abhängig sind:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
Lösung

1.
a) linear abhängig
b) linear unabhängig

> Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie Vielfache sind. Sie liegen dann auf einer Geraden und heißen **kollinear**.

c) Es existieren unendlich viele Lösungen wie $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}$, also linear abhängig.
d) linear unabhängig

> Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie **komplanar** sind, d.h. in einer Ebene liegen.

2.
a) $3 \cdot \vec{a} = \vec{b}$, also sind sie linear abhängig.
b) Wegen $-2 \cdot \vec{a} = \vec{b}$ sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear. Daher sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplananr und dahe linear abhängig.
c) Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.